Name: **Leginummer:**

Mathematik-Teil der Prüfung Mathematik III im Frühling 2007
Vorlesung *Mathematik III mit Systemanalyse* von Dr. P. Thurnheer.

Vorgesehene Zeit: 40 Minuten
Maximale Punktzahl: 15 Punkte
Hilfsmittel: Schriftliche Unterlagen, kein Taschenrechner, kein Mobiltelephon

Aufgabe	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
Total		

Bitte wenden!

1. **a)** Beschreiben Sie die in Parameterdarstellung gegebene Fläche

$$E : (u, v) \mapsto a(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ v \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} 0 \le u < 2\pi \\ 0 \le v \le 1 \end{matrix}$$

in Worten und erstellen Sie eine Skizze.

b) Betrachten Sie das Vektorfeld

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x\sqrt{z} \\ y\sqrt{z} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Fluss von F

i) durch E in die durch die Parametrisierung gegebene Normalenrichtung.

ii) durch $K_1 = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 \le 1,\ z = 0\}$ in Richtung der negativen z-Achse.

iii) durch $K_2 = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 \le 1,\ z = 1\}$ in Richtung der positiven z-Achse.

c) Prüfen Sie Ihre Resultate unter **b)** mit Hilfe des Satzes von Gauss (Zylinderkoordinaten einführen).

(5 Punkte)

2. Wir betrachten das Vektorfeld

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} e^x + y^2 \\ 2xy + 1 \\ xyz \end{pmatrix}.$$

a) *i)* Ist das Vektorfeld wirbelfrei?
ii) Ist es ein Potentialfeld?

Begründen Sie Ihre Antworten!

b) Skizzieren Sie die Fläche

$$E : (u, v) \mapsto a(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} 0 \le u \le 2 \\ 1 \le v \le 3 \end{matrix}$$

und berechnen Sie die Arbeit von F längs des Randes von E (wählen Sie selbst einen Umlaufsinn).

c) Widerspricht Ihr Resultat unter **b)** nicht Ihrer Feststellung in **a)** *ii)*? Kommentieren Sie!

(5 Punkte)

3. Reduzieren Sie die partielle Differentialgleichung

$$u_{xx}(x, t) - \frac{t^2 + 1}{2t} u_t(x, t) = 0$$

durch einen Separationsansatz in Produktform auf zwei gewöhnliche Differentialgleichungen und berechnen Sie deren allgemeine Lösungen.

(5 Punkte)